Übungen zu Mathematik I
Blatt 6

Aufgabe 1: Wir betrachten die Fläche eines Kreissegments wie es in Abb. 1 gezeigt wird. Zur Berechnung der Fläche gibt es mehrere Formeln, in denen unterschiedliche Größen verwendet werden. Wir interessieren uns für die Abhängigkeiten zwischen der Segmentfläche und den geometrischen Größen.

a) Es gilt die Näherungsformel:

$$A \approx \frac{2}{3} s \cdot h \,.$$

Wie ändert sich die Fläche, wenn wir die Länge s vergrößern? Vergleichen Sie auch mit der Skizze in Abb. 1.

b) Die exakte Formel, welche die Größe s verwendet, lautet:

$$A = \frac{r \cdot b}{2} - \frac{s \cdot (r - h)}{2} \,.$$

Gilt der Zusammenhang zwischen der Größe s und der Segmentfläche immer noch?

c) Die Segmentfläche kann auch über den Winkel $\alpha \in [0, \pi]$ im Bogenmaß berechnet werden:

$$A = \frac{r^2}{2}(\alpha - \sin \alpha) \,.$$

Wie ändert sich die Fläche, wenn wir den Winkel α ändern? Betrachten Sie zunächst die Skizze in Abb. 1 und analysieren sie anschließend die Formel.

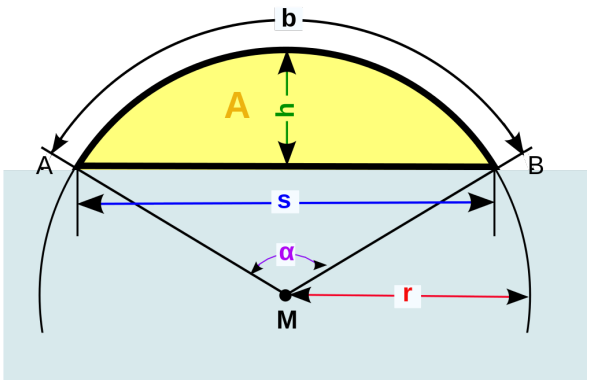


Abbildung 1: Größenbezeichnung beim Kreissegment (Quelle: Wikipedia)

Aufgabe 2: Ein Werkstück mit spezifischer Wärmekapazität c, Masse m und Oberfläche A wird in einen Ofen der Temperatur 220° gestellt. Die Aufwärmkurve wird durch eine Exponentialfunktion beschrieben:

$$T(t) = 220^\circ - (220^\circ - T_0) \cdot e^{-t/\tau} \,,$$

wobei T_0 die Anfangstemperatur des Werkstückes zur Zeit $t = 0$ beschreibt und die Zeitkonstante τ wie folgt definiert ist:

$$\tau = \frac{mc}{\alpha A} \,.$$

Hierbei gibt α den Wärmeübergang an (Wärmeübergangskoeffizient).

a) Die Zeitkonstante ist ein Maß dafür, wie schnell der Aufwärmvorgang stattfindet. Sie hängt von den gegebenen Parametern ab. Nehmen wir an, dass wir den Wärmeübergangskoeffizient beeinflussen können. Wie müssen wir dann α verändern (größer oder kleiner machen), um den Prozess zu beschleunigen?

b) Bestimmen Sie die Zeit t_1, bei der das Werkstück die Temperatur $T_1 > T_0$ annimmt.

c) In der Lösung zu Teilaufgabe b) tritt ein Minuszeichen auf. Warum ist die Zeit t_1 trotzdem positiv?

Aufgabe 3: Strom und Spannung besitzen an einer Kapazität und einer Induktiviät eine Phasenverschiebung, wie in Abb. 2 gezeigt wird. Bestimmen Sie die Gleichungen, welche die Situation in der Abbildung beschreiben.

Aufgabe 4: Als Gewinnschwelle oder break-even point bezeichnet man in den Wirtschaftswissenschaften den Punkt, an dem Erlös und Gesamtkosten einer Produktion gleich hoch sind und somit weder Gewinn noch Verlust erwirtschaftet wird. Aus mathematischer Sicht müssen wir Schnittpunkte von Funktionen berechnen, was wir im Folgenden üben wollen. Berechnen Sie die Schnittpunkte der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ und $g(x) = x + 1$

b) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 12x - 2$ und $g(x) = 2x^2 - 2$

Aufgabe 5: Wir betrachten das Skalarfeld

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

a) Bestimmen Sie die Höhenlinien. Welche Form haben diese?

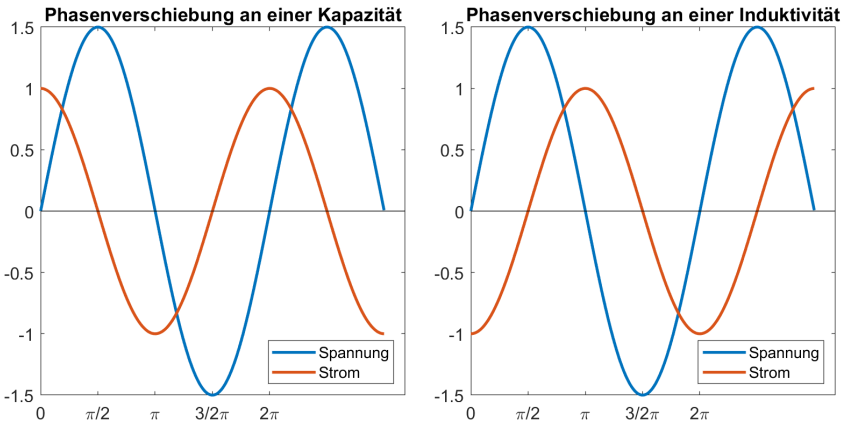


Abbildung 2: Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung an einer Kapazität und einer Induktivität.

b) Leiten Sie das Skalarfeld bzgl. x und y ab.

c) Skizzieren Sie die Höhenlinien. Bilden aus den beiden Ableitungen aus Teil b) einen Vektor, wobei die Ableitung nach x die x-Komponente bildet und die Ableitung nach y die y-Komponente. Fügen Sie das so entstandene Vektorfeld zu ihrer Skizze hinzu. Was stellen sie fest? Wie sehen die Feldlinien zu diesem Vektorfeld aus?

Aufgabe 6: Auf eine Kette, die an zwei Punkten aufgehängt wird, wirkt die Schwerkraft, wodurch die Kette durchhängt. Die mathematische Kurve, die dieses Durchhängen beschreibt, wird Kettenlinie genannt und kann durch den Kosinus hyperbolicus beschrieben werden.

Die Funktionen Sinus und Kosinus hyperbolicus werden wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \sinh(x) &= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \\ \cosh(x) &= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \end{aligned}$$

Zeigen Sie durch einfaches Nachrechnen, dass die folgenden beiden Zusammenhänge gelten, die an die standard Sinus- und Kosinus-Funktionen erinnern (daher der Name):

$$\begin{aligned} \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1 \\ \cosh(x) + \sinh(x) &= e^x \end{aligned}$$



Abbildung 3: Durchhängen einer Kette (Quelle: Wikipedia)